1.7 Zerlegung von Polynomen

[...] Leseempfehlung: Buch „Lin. Alg", Abschn. 1.7

1.8 Fundamentalsatz der Algebra

$p \in \mathbb{C}[z]$ Polynom mit komplexen Koeffizienten in der Variablen z

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

$$a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{C}$$

Es sei $c \in \mathbb{C}$; eingesetzt in p ergibt sich

$$p(c) = \sum_{k=0}^{n} a_k c^k$$

$\bar{c}$ eingesetzt in p ergibt

$\bar{\bar{z}} = z$

$$p(\bar{c}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \bar{c}^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{c^k} = \sum_{k=0}^{n} \bar{\bar{a}}_k \cdot \overline{c^k}$$

$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = \overline{z_1 \cdot z_2}$

$\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = \overline{z_1 + z_2}$

$$= \sum_{k=0}^{n} \overline{\bar{a}_k c^k} = \overline{\sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k c^k}$$

also $$\boxed{p(\bar{c}) = \overline{\sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k c^k}} \quad (*)$$

Satz 1.81

Es sei $p \in \mathbb{R}[x]$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten, also $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, \dots, n$.
Wenn $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p ist (d.h. $p(z) = 0$), dann ist auch das konjugierte $\bar{z}$ eine Nullstelle von p.

Begr.:

Es sei also z eine Nullstelle von p.

$\Longrightarrow \quad p(z) = 0 \quad |$ konjugieren

$\Longrightarrow \quad \overline{p(z)} = \overline{0} = 0$.

Es gilt nun

$$p(\bar{z}) \overset{(*)}{=} \overline{\sum_{k=0}^{n} \underbrace{\bar{a}_k}_{a_k} z^k} = \underbrace{\overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k}}_{p(z)} = \overline{p(z)} = \overline{0} = 0 \ \checkmark$$

$a_k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{a}_k = a_k$

Fazit: Die (komplexen) Nullstellen reeller Polynome bilden konjugierte Paare.

Folge: Ist $p \in \mathbb{R}[x]$ ein reelles Polynom mit ungeradem Grad, so muss p mindestens eine reelle Nullstelle besitzen.

Satz 1.82 FUNDAMENTALSATZ DER ALGEBRA

Jedes nicht-konstante Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$ besitzt eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Konsequenz:

Jedes nicht-konstante Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$ kann vollständig in Linearfaktoren über $\mathbb{C}$ zerlegt werden:

Für $p(z)$ gibt es also Nullstellen $z_1, \dots, z_m \in \mathbb{C}$ (verschieden!) sowie Exponenten $\nu_1, \dots, \nu_m$, sodass

$$p(z) = \alpha \cdot (z - z_1)^{\nu_1} \cdot (z - z_2)^{\nu_2} \cdots (z - z_m)^{\nu_m}$$

mit $\alpha \in \mathbb{C}$ (Leitkoeffizient).

ν : nü

Die Exponenten $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m$ heißen dabei (algebraische) Vielfachheiten oder (algebraische) Ordnungen der Nullstellen $z_1, z_2, \dots, z_m$.

Beispiel:

$$p(z) = (z-1)^2 \cdot (z-2)^1 = (z^2 - 2z + 1)(z-2)$$
$$= \dots = z^3 - 4z^2 + 5z - 2$$

Nullstellen $z_1 = 1, \nu_1 = 2$ (doppelt) $\quad (\alpha = 1)$

$z_2 = 2, \nu_2 = 1$ (einfach).

n-te Einheitswurzeln:

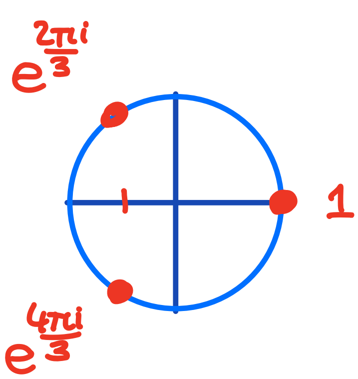
$$p(z) = z^n - 1 \qquad (a_n = 1, a_{n-1}, \dots, a_1 = 0, a_0 = 1)$$

Nullstellen?

$$p(z) = z^n - 1 = 0 \iff z^n = 1$$
$$\iff z \in \left\{ e^{\frac{2\pi i}{n} \cdot k} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$
$$\iff z \in \left\{ \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^k : k = 0, 1, \dots, n-1 \right\}$$

Beispiel: $n = 3$ (3-te Einheitswurzeln)

$$z^3 = 1 \iff z \in \left\{ e^{\frac{2\pi i}{3} \cdot k}, k = 0, 1, 2 \right\}$$
$$= \left\{ 1, e^{\frac{2\pi i}{3}}, e^{\frac{4\pi i}{3}} \right\}$$



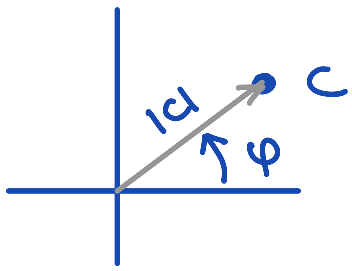
$$1 = \bar{1}$$

$$\overline{e^{\frac{2\pi i}{3}}} = e^{\frac{4\pi i}{3}} = e^{-\frac{2\pi i}{3}}$$

Welche Lösungen besitzt die Gleichung

$$z^n = c \qquad \text{für beliebiges } c \in \mathbb{C} \,?$$

Polarform von c: $\quad c = |c| e^{i \cdot \varphi}$



$$z^n = c$$

$$\Leftrightarrow \; z \in \left\{ \sqrt[n]{|c|} \cdot e^{\frac{\varphi}{n} \cdot i} \cdot e^{\frac{2\pi i}{n} \cdot k} : k = 0, 1, \ldots, n-1 \right\}$$

$$= \left\{ \sqrt[n]{|c|} \cdot e^{\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} k\right) \cdot i} : k = 0, 1, \ldots, n-1 \right\}$$

$\rightarrow$ n verschiedene Lösungen

s. Übungsaufgabe 12f (2. ÜB. Lin. Alg.)

Kap. 2 Lineare Gleichungssysteme, Matrizen und Determinanten

2.1 Lösung linearer Gleichungssysteme

Beispiel 1: Lineares Gleichungssystem (LGS) mit 2 Gleichungen und 2 Variablen:

$$2x_1 + x_2 = 4 \quad \wedge \quad 4x_1 + 3x_2 = 2$$

alternative Schreibweise :

$$\left\{\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 4 \\ 4x_1 + 3x_2 &= 2 \end{aligned}\right\} \cdot(-2) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 4 \\ \underline{0x_1} + \underbrace{x_2 = -6} \end{aligned}\right\} \cdot(-1)$$

Das −2-Fache der ersten Gleichung wird auf die zweite Gleichung addiert.

Effekt: x_1 verschwindet in der zweiten Gleichung

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} 2x_1 + \underline{0x_2} &= 10 \\ x_2 &= -6 \end{aligned}\right\} \cdot \tfrac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 &= 5 \\ x_2 &= -6 \end{aligned}\right\}$$

Lösung $x_1 = 5 \wedge x_2 = -6$

künftig: Schreibweise als Lösungsvektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} =: \mathbb{R}^2$$

Beispiel 2 LGS mit 2 Gleichungen und 2 Variablen

$$\left\{\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 4 \\ 4x_1 + 2x_2 &= 8 \end{aligned}\right\} \cdot(-2) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 4 \\ 0x_1 + 0x_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

immer erfüllt; keine Information es bleibt nur die erste Gleichung

Es bleibt nur eine Gleichung mit 2 Variablen:

$$2x_1 + x_2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 2 - \tfrac{1}{2}x_2$$

d.h. x_2 darf beliebig gewählt werden: $x_2 \in \mathbb{R}$; x_1 ergibt sich nach Wahl von x_2 als $x_1 = 2 - \frac{1}{2}x_2$

Die Lösungsmenge besteht somit aus ∞ vielen Lösungskombinationen.
Als „Lösung" wird jetzt eine derartige Lösungskombination aus x_1 und x_2 bezeichnet :

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} 2 - \frac{1}{2}x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_2 \in \mathbb{R} \right\}}$$

Lösungsmenge aus ∞ vielen Lösungsvektoren

Diese Menge enthält z.B. folgende Lösungsvektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \ldots$$

hier $x_2 = 0$ gewählt
$\Rightarrow x_1 = 2 - \frac{1}{2} \cdot 0 = 2$

Beispiel 3: LGS mit 2 Gleichungen und 2 Variablen

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 = 4 \\ 4x_1 + 2x_2 = 2 \end{array} \right\} \cdot (-2) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 = 4 \\ 0x_1 + 0x_2 = -6 \end{array} \right\} \quad ↯$$

2. Gleichung: $0 = -6$
WIDERSPRUCH

Fazit: Dieses LGS besitzt keine Lösung!

Bem: Lineare Gleichungssysteme können
(i) keine Lösung
(ii) genau eine Lösung (d.h. genau einen Lösungsvektor)
(iii) mehrere Lösungen (d.h mehrere Lösungsvektoren)
besitzen.